Wybrane zastosowania pochodnych – monotoniczność i ekstrema funkcji

Twierdzenie 2.

- Jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.
- Jeżeli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest w tym przedziale malejąca.
- Jeżeli $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest w tym przedziale stała.

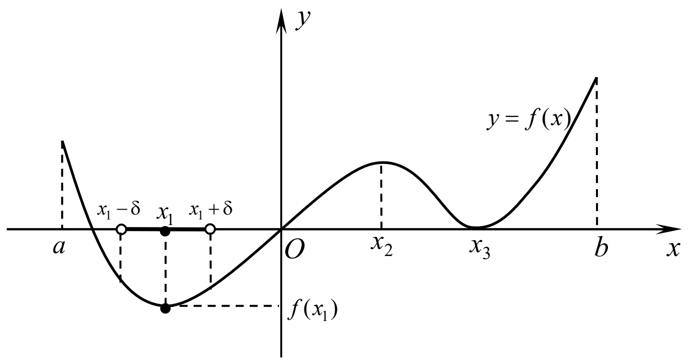
Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu U punktu x_0.

Definicja 1. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0:

- *minimum lokalne* $\Leftrightarrow \exists_{\delta>0} \forall_{x \in S(x_0, \delta)}\ f(x) \geq f(x_0)$,
- *maksimum lokalne* $\Leftrightarrow \exists_{\delta>0} \forall_{x \in S(x_0, \delta)}\ f(x) \leq f(x_0)$.

Gdy nierówności w powyższej definicji zastąpimy nierównościami ostrymi, to mówimy odpowiednio o *minimum* (*maksimum*) *lokalnym właściwym.* Maksima i minima noszą wspólną nazwę *ekstremów funkcji.*

Uwaga. Pojęcia minimum (maksimum) lokalnego nie należy mylić z pojęciem wartości najmniejszej (największej) funkcji w danym przedziale. Funkcja o wykresie przedstawionym na rysunku 1 ma dwa minima lokalne: dla x_1 (zostało to dodatkowo zinterpretowane na rysunku w oparciu o odpowiednią definicję) i dla x_3 oraz jedno maksimum lokalne w punkcie x_2. Najmniejszą wartość w przedziale $\langle a, b \rangle$ funkcja ta przyjmuje w punkcie x_1, natomiast największą – dla punktu o odciętej *b*.



Rys. 1. Ekstrema lokalne a największa (najmniejsza) wartość funkcji w przedziale

Twierdzenie 3 (*warunek konieczny istnienia ekstremum*).

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i osiąga w tym punkcie ekstremum, to $f'(x_0)=0$.

Uwaga.

1. Twierdzenie odwrotne do powyższego nie jest prawdziwe, czyli może się zdarzyć, że w pewnym punkcie x_0 spełniona jest warunek $f'(x_0)=0$ pomimo, że w tym punkcie funkcja nie posiada ekstremum.
2. Funkcja może mieć ekstrema lokalne **tylko** w punktach, w których jej pochodna równa się zero albo, w których jej pochodna nie istnieje lub jest równa nieskończoność. Punkty te nazywamy *punktami stacjonarnymi*.

Twierdzenie 4 (*I warunek wystarczający istnienia ekstremum*).

Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 oraz ma pochodną $f'(x)$ w pewnym sąsiedztwie $S(x_0,\delta)$ punktu x_0, a ponadto:

1) $\begin{cases} f'(x)<0 & \text{dla} \quad x\in S_-(x_0,\delta) \\ f'(x)>0 & \text{dla} \quad x\in S_+(x_0,\delta) \end{cases}$, to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum lokalne (właściwe);

2) $\begin{cases} f'(x)>0 & \text{dla} \quad x\in S_-(x_0,\delta) \\ f'(x)<0 & \text{dla} \quad x\in S_+(x_0,\delta) \end{cases}$, to funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne (właściwe).

Możemy powiedzieć, że jeżeli przy przejściu przez punkt x_0 pochodna zmienia znak z „–” na „+”, to funkcja w tym punkcie osiąga minimum lokalne, natomiast jeżeli zmiana następuje z „+” na „–”, to mamy do czynienia z maksimum lokalnym.

Twierdzenie 5 (*II warunek wystarczający istnienia ekstremum*).
Jeżeli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz

1) $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$

2) $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, n – parzyste $(n \geq 2)$,

3) $f^{(n)}(x)$ jest ciągła w punkcie x_0,

to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne, przy czym jest to:

- minimum właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0,$
- maksimum właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0.$

Bazując na podanych twierdzeniach można sformułować następujący schemat:

Schemat badania monotoniczności oraz wyznaczania ekstremów lokalnych funkcji $y = f(x)$ **:**

1. Wyznaczamy dziedzinę danej funkcji – D_f ,
2. Obliczamy pochodną $f'(x)$ oraz wyznaczamy jej dziedzinę $D_{f'}$,
3. Przyrównujemy pochodną do zera i rozwiązujemy równanie $f'(x) = 0.$ Do zbioru rozwiązań tego równania dołączamy jeszcze punkty, w których pochodna nie istnieje, a w których funkcja jest określona i otrzymujemy w ten sposób zbiór punktów stacjonarnych (podejrzanych o ekstremum). Załóżmy, że ten zbiór ma postać: $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.
4. Rozwiązujemy nierówności:
   $f'(x) > 0$ – w przedziałach, w których spełniona jest ta nierówność badana funkcja jest rosnąca,
   $f'(x) < 0$ – w przedziałach, w których spełniona jest ta nierówność badana funkcja jest malejąca,
5. Na podstawie rozwiązań powyższych nierówności określamy znak pochodnej w lewostronnym i prawostronnym sąsiedztwie każdego punktu stacjonarnego – jeżeli przy przejściu przez punkt stacjonarny x_i pochodna zmienia znak, to w danym punkcie funkcja ma ekstremum lokalne, przy czym:

- jeżeli zmiana następuje z „–” na „+”, to funkcja w tym punkcie osiąga minimum lokalne; obliczamy wartość tego minimum: $y_{\min} = f(x_i)$,
- jeżeli zmiana następuje z „+” na „–”, to funkcja w tym punkcie osiąga maksimum lokalne; obliczamy wartość tego maksimum: $y_{\max} = f(x_i)$.

Przykład 6. Wyznaczyć ekstrema lokalne oraz zbadać monotoniczność funkcji:

a) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}$, b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, c) $f(x) = -x \ln x$.

Rozwiązanie.

a) Dziedziną badanej funkcji jest $D_f = \mathbb{R}$.

Obliczamy pochodną oraz wyznaczamy jej dziedzinę:

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(2x - x^2)\,; \quad D_{f'} = \mathbb{R}.$$

Przyrównujemy pochodną do zera:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}(2x - x^2) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \forall_{x\in\mathbb{R}}\ \mathrm{e}^{v(x)} > 0 \right\} \Leftrightarrow 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

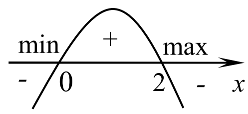
Punktami stacjonarnymi są: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Rozwiązujemy nierówności:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}(2x - x^2) > 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (0, 2) \text{ (rysunek 2)},$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty).$$



Rys. 2. Wykres zmiany znaku pochodnej funkcji z przykładu 6a)

Stąd otrzymujemy:

1) funkcja rośnie w przedziale $(0, 2)$,
2) funkcja maleje w przedziałach: $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$,
3) w punkcie $x_1 = 0$ funkcja osiąga minimum lokalne (pochodna zmienia znak z „–” na „+”) wynoszące:

   $y_{\min} = f(0) = 0$;

   w punkcie $x_2 = 2$ funkcja osiąga maksimum lokalne wynoszące:

   $$y_{\max} = f(2) = 4\mathrm{e}^{-2} = \frac{4}{\mathrm{e}^2}.$$

b) Dziedzina funkcji: $D_f = \mathbb{R}$.

Obliczamy pochodną oraz wyznaczamy punkty stacjonarne:

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$, $\quad D_{f'} = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$.

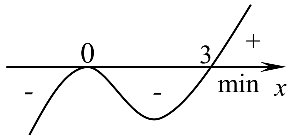
Punkty stacjonarne: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Rozwiązujemy nierówności:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2(x-3) > 0 \Leftrightarrow x \in (3, +\infty)$,

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3) \setminus \{0\}$.



Rys. 3. Wykres zmiany znaku pochodnej funkcji z przykładu 6b)

Zauważmy (rysunek 3), że przy przejściu przez punkt $x = 0$ pochodna nie zmienia znaku, a zatem w tym punkcie badana funkcja nie będzie miała ekstremum. Możemy zatem sformułować następujące wnioski:

1) w przedziale $(-\infty, 3)$ funkcja maleje,

2) w przedziale $(3, +\infty)$ funkcja rośnie,

3) w punkcie $x = 3$ funkcja osiąga minimum lokalne wynoszące:
$y_{\min} = f(3) = -26$.

c) Dziedziną funkcji $f(x) = -x \ln x$ jest $D_f = (0, +\infty)$.

Obliczamy pochodną oraz wyznaczamy jej dziedzinę:

$$f'(x) = -\ln x - x \cdot \frac{1}{x} = -\ln x - 1; \quad D_{f'} = (0, +\infty).$$

Przyrównujemy pochodną do zera:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln \mathrm{e}^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Mamy zatem jeden punkt stacjonarny: $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Rozwiązujemy odpowiednie nierówności (uwzględniając ich dziedzinę):

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x < \ln \mathrm{e}^{-1} \Leftrightarrow x < \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ D_{f'} = (0, +\infty) \right\} \Leftrightarrow x \in \left(0\,, \frac{1}{\mathrm{e}} \right)$$

oraz analogicznie

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\,, +\infty \right).$$

Widzimy zatem, że w punkcie $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ pochodna zmienia znak z „+” na „–” , a zatem funkcja będzie miała w tym punkcie maksimum lokalne.

Ostatecznie możemy zapisać wnioski:

1) w przedziale $\left(0\,, \frac{1}{\mathrm{e}} \right)$ funkcja jest rosnąca,

2) w przedziale $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\,, +\infty \right)$ funkcja malejąca,

3) w punkcie $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ funkcja osiąga maksimum lokalne wynoszące:

$$y_{\max} = f\left(\frac{1}{\mathrm{e}} \right) = -\frac{1}{\mathrm{e}} \ln \frac{1}{\mathrm{e}} = -\frac{1}{\mathrm{e}} \ln \mathrm{e}^{-1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} \cdot (-1) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Przykład 7. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$$

w przedziale $\langle -1, 8 \rangle$.

Rozwiązanie.

Można pokazać, że funkcja $y = f(x)$ ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$ może przyjąć w tym przedziale wartość najmniejszą oraz największą jedynie w punktach stacjonarnych leżących wewnątrz przedziału $\langle a, b \rangle$ lub w punktach krańcowych przedziału. Dziedziną funkcji jest: $D_f = \mathbb{R}$.

Postępując analogicznie, jak w przykładzie 8.6 wyznaczamy punkty stacjonarne. W tym celu obliczamy pochodną:

$$f'(x) = \left(2x - 3\sqrt[3]{x^2} \right)' = \left(2x - 3x^{\frac{2}{3}} \right)' = 2 - 2x^{-\frac{1}{3}} = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Dziedziną pochodnej jest: $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Przyrównujemy pochodną do zera:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Punktami stacjonarnymi są: $x_1 = 0$ (punkt, w którym pochodna nie istniej, a funkcja jest określona), punkt $x_2 = 1$ (punkt, w którym pochodna się zeruje). Ponieważ oba punkty stacjonarne należą do przedziału $\langle -1, 8 \rangle$, to obliczamy wartości danej funkcji w tych punktach oraz wartości na końcach przedziału:

$f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(-1) = -5$, $f(8) = 4$.

Zatem najmniejszą wartością funkcji jest -5 (taką wartość funkcja przyjmuje w punkcie $x = -1$ będącym lewym końcem danego przedziału), a największa wartość jest równa 4 (dla prawego końca przedziału: $x = 8$).

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Wyznaczyć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji:

35. $f(x) = -x^3 + x^2 + 2$,

36. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 15x - 15$,

37. $f(x) = \frac{3}{2}x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1$,

38. $f(x) = x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}$,

39. $f(x) = \frac{2x}{x+3}$,

40. $f(x) = x + \frac{2}{x}$,

41. $f(x) = \frac{1 - x^2}{2x}$,

42. $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$,

43. $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$,

44. $f(x) = x - \mathrm{e}^x$,

45. $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2}$,

46. $f(x) = x^3\mathrm{e}^{-6x}$,

47. $f(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{2x}$,

48. $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}$,

49. $f(x) = \frac{x^4}{\mathrm{e}^x}$,

50. $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{x+1}$

51. $f(x)=\ln(x^2-1)$,

52. $f(x)=x^3-24\ln x$,

53. $f(x)=x^2-4\ln(x-1)$,

54. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,

55. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\ln(x-1)$,

56. $f(x)=x-\ln(1+x^2)$

57. $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$,

58. $y=\sqrt[3]{x^2-2x}$,

59. $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{x+1}$,

60. $f(x)=\operatorname{arctg} x-x$,

61. $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji:

62. $f(x)=x^4-2x^2+5$ w przedziale $\langle -2,2\rangle$,

63. $f(x)=x-2\ln x$ w przedziale $\langle 1,e\rangle$,

64. $f(x)=\sqrt{100-x^2}$ w przedziale $\langle -6,8\rangle$,

65. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$ w przedziale $\langle 0,1\rangle$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch